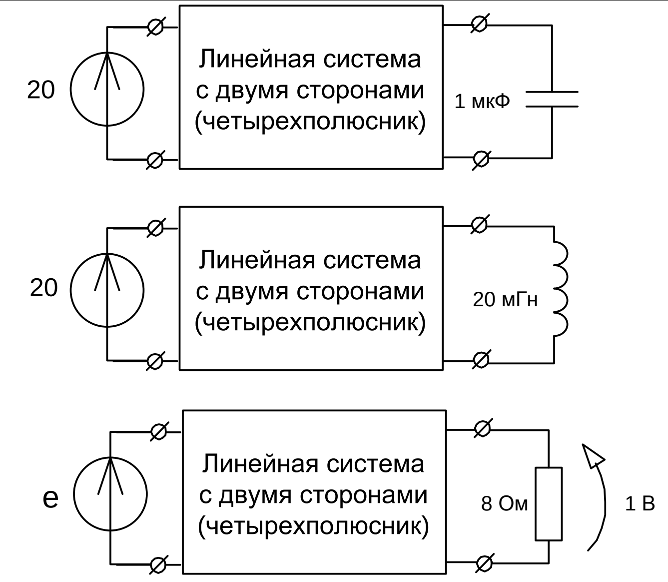
"ТЕК'2020"

XIII олимпиада по теории электронных цепей,

посвященная памяти
проф. Сигорского Виталия Петровича



Задача 1.

Емкость, индуктивность, и сопротивление поочередно подключаются на выход одной и той же системы с двумя сторонами. После окончания переходных процессов в электрическом поле емкости накапливается 50 мкДж энергии, а в магнитном поле индуктивности 250 мДж. Найти напряжение е источника напряжения, при котором напряжение на сопротивлении равно 1 В.

Решение:

Пара полюсов системы, к которой подключен источник напряжения, образуют входную сторону системы (вход), а другая пара полюсов – выходную (выход). При подключении емкости на выход системы после окончания переходных процессов ток через емкость не протекает, сопротивление емкости равно бесконечности, а напряжение на емкости - напряжению холостого хода на выходе системы с двумя сторонами $U_{вых}^{x.x.}$ (см. Рис. 13.1). Его можно найти, используя энергию W_C, запасенную в электрическом поле емкости:

Рис. 13.1. Исходная система с двумя сторонами в режиме холостого хода.

$$W_c = \frac{c\left(U_{вых}^{x.x.}\right)^2}{2} = 50\,мкДж;$$
$$U_{вых}^{x.x.} = \sqrt{\frac{2W_c}{c}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-5}}{10^{-6}}} = 10\,В. \qquad (13.1)$$

При подключении индуктивности к выходной стороне системы после окончания переходных процессов напряжение на индуктивности, как и ее сопротивление, равно нулю. Следовательно, система находится в режиме короткого замыкания на выходе, и через индуктивность протекает ток короткого замыкания $I_{вых}^{к.з.}$ (см. Рис. 13.2). Его можно найти, зная запасенную в магнитном поле индуктивности энергию W_L:

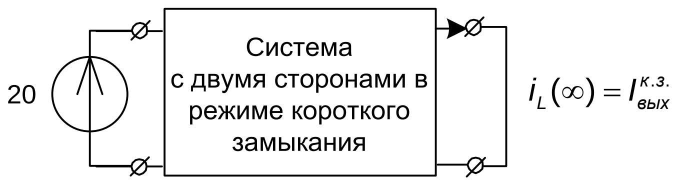


Рис. 13.2. Исходная система с двумя сторонами в режиме короткого замыкания.

$$W_L = \frac{L\left(I_{вых}^{к.з.}\right)^2}{2} = 250\,мДж;$$
$$I_{вых}^{к.з.} = \sqrt{\frac{2W_L}{L}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,25}{2\cdot 10^{-2}}} = 5A. \qquad (13.2)$$

Выходные полюсы системы с двумя сторонами можно считать полюсами двухполюсника, в состав которого входит линейная система с двумя сторонами и источник напряжения. Тогда по теореме об эквивалентном источнике заменяем этот двухполюсник, например, схемой Тевенена (см. Рис. 13.3). Параметры e_e и r_e определяем через напряжение холостого хода и ток короткого замыкания по формулам (13.3):

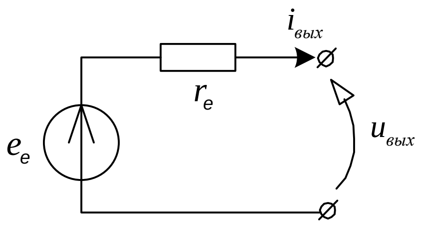


Рис. 13.3. Схема Тевенена, эквивалентная системе с двумя сторонами.

$$e_e = U_{вых}^{х.х.} = 10\,B;$$
$$r_e = \frac{U_{вых}^{х.х.}}{I_{вых}^{к.з.}} = \frac{10}{5} = 2\,Ом. \qquad (13.3)$$

Подключаем к схеме Тевенена в качестве нагрузки сопротивление $r_н = 8\,Ом$ и определяем, каким должно быть напряжение источника e_x, чтобы напряжение на нагрузке равнялось 1 В (см. Рис.13.4 и (13.4)).

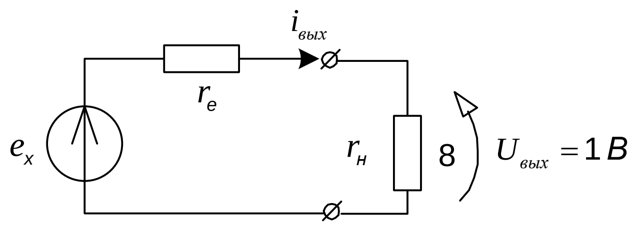


Рис. 13.4. Схема Тевенена, эквивалентная системе с двумя сторонами.

$$I_{вых} = \frac{U_{вых}}{r_н} = \frac{1}{8}\, Ом;$$
$$e_x = U_{вых} + I_{вых} r_e = 1 + \frac{1}{8} 2 = 1{,}25\, B. \qquad (13.4)$$

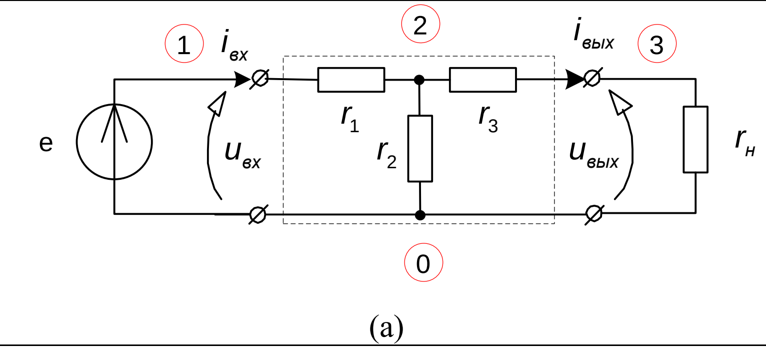
Чтобы найти искомое напряжение источника e, воспользуемся коэффициентом передачи напряжения в режиме холостого хода:

$$K_u^{x.x.} = \left.\frac{U_{вых}^{x.x.}}{U_{вх}}\right|_{U_{вх}=20\ B} = \frac{1}{2} \Rightarrow K_u^{x.x.} = \left.\frac{e_x}{e}\right|_{e=?} = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{e_x}{K_u^{x.x.}} = 2{,}5\, B.$$

Задача 2.

Изобразить (синтезировать) схему, в которой количество узлов не менее четырех, а электрические свойства совпадают с электрическими свойствами системы с двумя сторонами из задачи 1.

Поскольку коэффициент передачи напряжения системы с двумя сторонами в режиме холостого хода меньше единицы, то ее внутренняя часть может состоять из одних сопротивлений. Простейшей структурой из сопротивлений, на основе которой можно образовать схему, имеющую четыре узла, является соединение сопротивлений в виде звезды (см. Рис. 13.5а).



$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 2 & 3 & \\ Y_c = & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} g_1 \\ -g_1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -g_1 \\ g_1+g_2+g_3 \\ -g_3 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -g_3 \\ g_3 \end{array} & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

(б)

Рис. 13.5. (а) схема исходной системы с двумя сторонами; (б) матрица проводимости "черного ящика".

Формируем матрицу проводимости Y_c "черного ящика", т.е., внутренней части системы с двумя сторонами (см. Рис. 13.5б), где $g_i = r_i^{-1}$; $i = 1,2,3$ - проводимости компонентов. Выражаем коэффициент передачи напряжения системы в режиме холостого хода $K_u^{x.x.}$ через матрицу проводимости Y_c и через входное и выходное напряжения:

$$K_u^{x.x.} = \left.\frac{r_н \Delta_{\alpha\beta}}{r_н \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}\right|_{\substack{r_н=\infty \\ \alpha\to 1 \\ \beta\to 3}} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}};$$
$$K_u^{x.x.} = \left.\frac{U_{вых}^{x.x.}}{u_{вх}}\right|_{\substack{u_{вх}=20\,B \\ U_{вых}^{x.x.}=10\,B}} = \frac{1}{2}; \qquad \Rightarrow \Delta_{11} = 2\Delta_{13}, \tag{13.5}$$

где Δ_{11}, Δ_{13} - алгебраические дополнения матрицы Y_c.

Аналогичным образом определяем проводимость передачи системы в режиме короткого замыкания на выходе через матрицу проводимости системы Y_c и через выходной ток и входное напряжение:

$$Y_{пер}^{к.з.} = \left.\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{r_н \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}\right|_{\substack{r_н=0 \\ \alpha\to 1 \\ \beta\to 3}} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11,33}};$$
$$Y_{пер}^{к.з.} = \left.\frac{I_{вых}^{к.з.}}{u_{вх}}\right|_{\substack{u_{вх}=20\,B \\ I_{вых}^{к.з.}=5\,A}} = \frac{1}{4}\,См; \qquad \Rightarrow \Delta_{11,33} = 4\Delta_{13}, \tag{13.6}$$

где $\Delta_{11,33}$ - кратное алгебраическое дополнение матрицы Y_c.

Находим алгебраические дополнения Δ_{11}, Δ_{13} и $\Delta_{11,33}$ и подставляем в (13.5) и (13.6):

$$\begin{aligned} \Delta_{11} = 2\Delta_{13} \quad &\Rightarrow \quad g_3(g_1+g_2+g_3) - g_3^2 = 2g_1g_3 \;\; \Rightarrow \;\; g_1 = g_2; \\ \Delta_{11,33} = 4\Delta_{13} \quad &\Rightarrow \quad g_1+g_2+g_3 = 4g_1g_3. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Полученная система из двух уравнений с тремя неизвестными g_1, g_2, g_3 имеет бесконечное множество решений. Выбираем одно из решений, задав значение одной из неизвестных, например, $g_1 = 0{,}5\text{См}$. Находим g_2 из первого уравнения в (13.7) и подставляем во второе:

$$g_1+g_2+g_3 = 4g_1g_3\big|_{g_1=g_2=0,5} \;\; \Rightarrow \;\; g_3 = 1\,См \;\; \Rightarrow \;\; r_3 = 1\,Ом. \tag{13.8}$$

Схема Рис. 13.5а с учетом найденных номиналов сопротивлений принимает вид, показанный на Рис. 13.6. В ней при сопротивлении $r_н = 8\,Ом$ напряжение на нагрузке (выходное напряжения системы $u_{вых}$) должно быть равно 1В согласно условию задачи при найденном напряжении источника $e = 2{,}5\,В$.

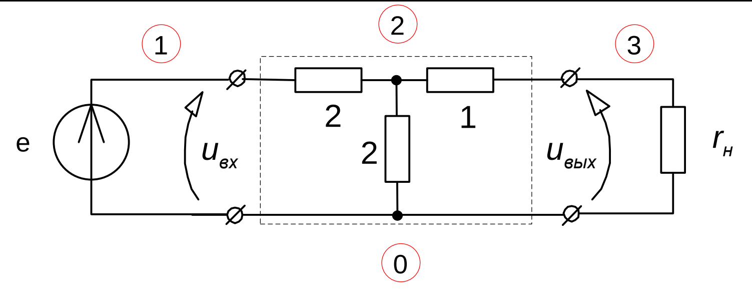
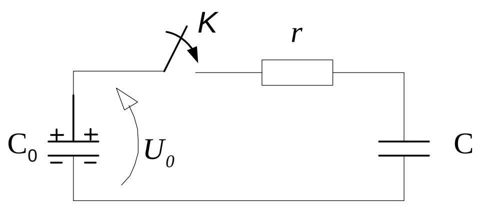


Рис. 13.6. Синтезированная схема, эквивалентная исходной системе с двумя сторонами.

Выполним проверку:

$$u_{вых} = K_u\, u_{вх}\big|_{u_{вх}=e} = \frac{r_н \Delta_{\alpha\beta}}{r_н \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}} e \Bigg|_{\substack{\alpha\to 1\\ \beta\to 3}} = \frac{r_н \Delta_{13}}{r_н \Delta_{11} + \Delta_{11,33}} e \Bigg|_{\substack{r_н=8\\ e=2{,}5}} = \frac{8\cdot 0{,}5}{8\cdot 1 + 2} 2{,}5 = 1В, \quad (13.9)$$

что совпадает с требуемым значением.



Задача 3.

Заряженная емкость C_0 = 8 Ф, начальное напряжение на которой U_0=10 В, подключается ключом К. Емкость С не заряжена. Во время переходного процесса рассеивается 80 Дж электрической энергии. Определить емкость С.

Исходную схему после коммутации ключа изображаем так, как показано на Рис. 13.7а, где заряженную емкость c_0 заменяем на последовательное соединение незаряженной емкости c_0 и источника напряжения U_0. Тогда напряжение $u_0(t)\big|_{t=0} = U_0 = 10\,В$, что соответствует условию задачи. В этой схеме электрическая энергия может рассеиваться только на сопротивлении r, превращаясь в тепло. Рассеянную энергию находим через мгновенную мощность на сопротивлении $p_R(t)$, которую, в свою очередь, находим следующим образом:

$$p_R(t) = r i^2(t). \quad (13.10)$$

Чтобы найти ток $i(t)$, воспользуемся операторным методом, заменив схему на Рис. 13.7a операторной схемой Рис. 13.7b, которую упростим методом эквивалентных преобразований (см. Рис. 13.7c), где s - комплексная переменная.

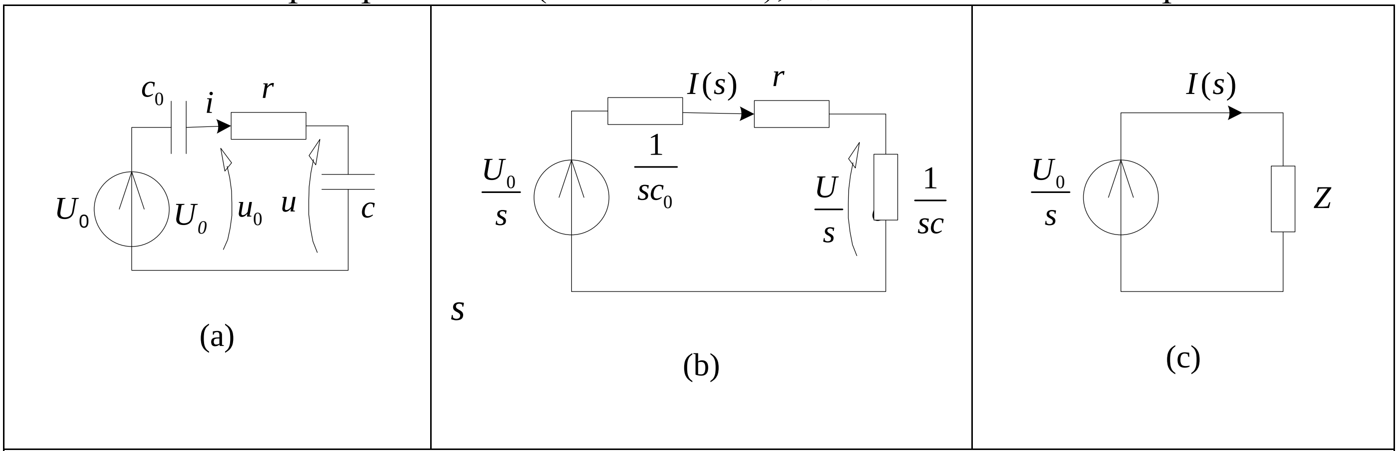


Рис. 13.7. (a) исходная схема после замыкания ключа K;(b) операторная схема; (c) упрощенная операторная схема/

Находим операторное изображение тока i:

$$I(s)=\frac{U_0}{s\cdot Z}=\frac{U_0}{s(r+\dfrac{1}{sc_0}+\dfrac{1}{sc})}=\frac{U_0}{r(s+\dfrac{c+c_0}{rcc_0})}. \qquad (13.11)$$

Находим полюс p операторного изображения тока, приравняв знаменатель к нулю:

$$\left. r\,(s+\frac{c+c_0}{rcc_0})\right|_{s=p}=0 \;\Rightarrow\; p=-\frac{c+c_0}{rcc_0}. \qquad (13.12)$$

Тогда ток $i(t)$ находим как оригинал изображения (13.11):

$$\begin{aligned} &i(t)=Ke^{pt};\\ &K=(s-p)\,I(s)\big|_{s=p}=\frac{(s-p)U_0}{r(s-p)}=\frac{U_0}{r};\\ &i(t)=\frac{U_0}{r}e^{pt}. \end{aligned} \qquad (13.13)$$

Находим энергию, рассеянную на сопротивлении, используя (13.10), (13.12) и (13.13), которая по условию задачи должна равняться 80 Дж:

$$W_R=\int_0^\infty p_R(t)dt=\int_0^\infty i^2(t)rdt=\frac{U_0^2}{r}\int_0^\infty \mathrm{e}^{2pt}dt=\frac{U_0^2}{r}\frac{1}{2p}\left(\mathrm{e}^{2pt}\right)\Big|_0^\infty=\frac{U_0^2}{2}\cdot\frac{c_0c}{c_0+c}=80\ \text{\textit{Дж}}. \qquad (13.14)$$

Из уравнения (13.14) находим неизвестную емкость c:

$$\frac{U_0^2}{2}\cdot\frac{c_0c}{c_0+c}=80;\Rightarrow\quad \frac{100}{2}\cdot\frac{8c}{8+c}=80;\Rightarrow\quad 5c=8+c;\Rightarrow\quad c=2\text{\textit{Ф}}.$$